

РОЗДІЛ 3. ВІСЕСИМЕТРИЧНІ ХВИЛІ В ПРУЖНИХ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ПРОКОВЗУВАННІ ШАРІВ

У цьому розділі розглянемо закономірності поширення вісесиметричних пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах періодичної структури з початковими напруженнями. Для дослідження використаємо точні розв'язки тривимірної динамічної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями відповідних вісесиметричних задач. При викладенні матеріалу будемо притримуватись позначень прийнятих в монографіях [78, 80, 81].

3.1. Постановка задач для стисливих та нестисливих матеріалів

При дослідженні динамічних вісесиметричних процесів в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями скористаємося лагранжевими координатами $y_n \equiv y^n$, які в початковому напружено-деформованому стані співпадають з декартовими координатами, і лагранжевими координатами r', θ, y_3 , які в початковому напружено-деформованому стані співпадають з круговими циліндричними координатами; зв'язок між координатами $y_n \equiv y^n$ і r', θ, y_3 записується у вигляді звичайних співвідношень. Дослідження проводитимемо в розширеній постановці, приймаючи, що в початковому напружено-деформованому стані окремі компоненти композитного матеріалу можуть деформуватися по-різному, тобто вважатимемо, що в початковому напружено-деформованому стані окремі компоненти композитного матеріалу не сполучені між собою і повне їх з'єднання відбувається лише після виникнення напружено-деформованого стану.

Надалі введемо декартову систему координат (y_1, y_2, y_3) у початковому напружено-деформованому стані так, щоб вісь Oy_3 була спрямована по нормалі до площин розділу шарів (рис. 3.1).

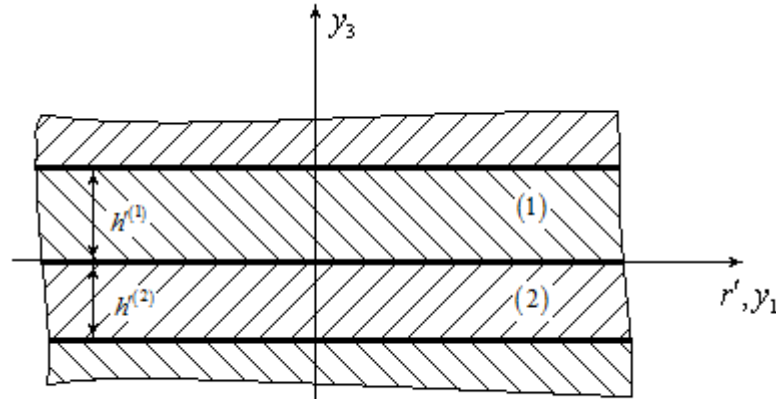


Рис. 3.1

Матеріали шарів вважатимемо гіперпружними ізотропними з довільною структурою пружних потенціалів; у разі трансверсально-ізотропних гіперпружних матеріалів шарів вважатимемо, що вісь ізотропії спрямована уздовж осі Oy_3 . Крім того, розглядатимемо шаруваті композитні матеріали з початковими напруженнями, які складаються з шарів двох типів, що чергуються, в кожному з яких матеріали і початкові напружено-деформовані стани є однаковими для даного типу шарів.

Вважаємо, що початковий напружений стан є однорідним і визначається виразами

$$u_m^{0(j)} = (\lambda_m^{(j)} - 1)x_m; \quad \lambda_m^{(j)} = \text{const.} \quad (3.1)$$

Також приймаємо, що для кожного з шарів мають місце наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} S_{11}^{0(j)} = S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad \sigma_{11}^{0(j)} = \sigma_{22}^{0(j)} \neq \sigma_{33}^{0(j)}; \\ \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h'^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В (3.1) і (3.2) індексами в дужках ($j=1,2$) відзначені всі величини, що відносяться до шарів різних типів. $S_{tt}^{0(j)}$ – складові тензора узагальнених напружень Лагранжа, $h'^{(j)}$ – товщина j -го шару в початковому напружено-деформованому стані, $h^{(j)}$ – товщина j -го шару в природному стані, $\lambda_m^{(j)}$ – коефіцієнти видовження уздовж відповідних вісей, $u_m^{0(j)}$ – переміщення.

В представленнях загальних розв'язків просторової динамічної лінеаризованої задачі теорії пружності для тіл з початковими напруженнями приймемо

$$\begin{aligned} u_{r'}^{(j)} &= u_{r'}^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad u_{\theta}^{(j)} \equiv 0; \quad u_3^{(j)} = u_3^{(j)}(r', y_3, \tau); \\ u_4^{(j)} &\equiv p^{(j)} = p^{(j)}(r', y_3, \tau). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Останнє співвідношення в (3.3) відповідає тільки нестисливим тілам.

У цьому випадку в представленні загальних розв'язків просторових динамічних лінеаризованих задач теорії пружності стосовно до загального розв'язку вісесиметричної задачі в циліндричних координатах можна також прийняти

$$\Psi'^{(j)} \equiv 0; \quad \chi'^{(j)} = \chi'^{(j)}(r', y_3, \tau). \quad (3.4)$$

З врахуванням (3.4) запишемо основні співвідношення для стисливих та нестисливих тіл.

Стисливі тіла. З (2.23) при умові (3.4) для визначення переміщень маємо вирази

$$\begin{aligned} u_{r'}^{(j)} &= -\frac{\partial^2}{\partial r' \partial y_3} \chi'^{(j)}; \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'}; \\ u_3^{(j)} &= \left(\omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right)^{-1} \left(\omega'_{1111} \Delta_1 + \omega'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \chi'^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

З виразів (2.24), (3.4) і (3.5) визначаємо складові тензора напруження $Q'^{(j)}$ при $y_3 = \text{const}$

$$Q'_{33}^{(j)} = \left(\omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \left[\omega'_{1111} + \omega'_{3333} - \omega'_{1133} \left(\omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right) \right] \Delta'_1 + \omega'_{3333} \omega'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \omega'_{3333} \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} \frac{\partial}{\partial y_3} \chi'^{(j)}; \quad (3.6)$$

$$Q'_{3r'}^{(j)} = \left(\omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right)^{-1} \left(\omega'_{1111} \omega'_{1313} \Delta'_1 + \omega'_{1133} \omega'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \omega'_{1313} \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial}{\partial r'} \chi'^{(j)}.$$

Для визначення функцій $\chi'^{(j)}$ з (2.21) за умови (3.4) маємо

$$\left[\left(\Delta'_1 + \xi_2'^{(j)^2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta'_1 + \xi_3'^{(j)^2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \varrho'^{(j)} \left(\frac{\omega'_{1111} + \omega'_{1331}}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \Delta'_1 + \frac{\omega'_{3333} + \omega'_{3113}}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\varrho'^{(j)^2}}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \right] \chi'^{(j)} = 0. \quad (3.7)$$

Величини $\xi_2'^{(j)}$ і $\xi_3'^{(j)}$ в (3.7) визначаються з виразів (2.22) для матеріалів кожного з даних шарів.

Нестисливі тіла. В даному випадку для визначення переміщень з врахуванням (3.4) і (2.31) отримуємо

$$u_{r'}^{(j)} = - \frac{\partial^2}{\partial r' \partial y_3} \chi'^{(j)}; \quad u_3^{(j)} = \Delta'_1 \chi'^{(j)}; \quad \varrho'^{(j)} = \varrho^{(j)}$$

$$u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = \left[\left(\kappa'_{1111} - \kappa'_{1133} - \kappa'_{1313} \right) \Delta'_1 + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} \chi'^{(j)}. \quad (3.8)$$

З виразів (2.32) і (3.8) визначаємо складові тензора напруження $Q'^{(j)}$ при $y_3 = \text{const}$

$$Q'_{33}^{(j)} = \left[\left(\kappa'_{1111} + \kappa'_{3333} - 2\kappa'_{1133} - \kappa'_{1313} \right) \Delta'_1 + \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} \chi'^{(j)};$$

$$Q'_{3r'}^{(j)} = \left(\kappa'_{1313} \Delta'_1 - \kappa'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial}{\partial r'} \chi'^{(j)}. \quad (3.9)$$

Для визначення функцій $\chi'^{(j)}$ з (2.29) за умови (3.4) маємо

$$\left[\left(\Delta'_1 + \xi_2'^{(j)^2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\Delta'_1 + \xi_3'^{(j)^2} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \frac{\rho'^{(j)}}{\chi_{1331}'^{(j)}} \left(\Delta'_1 + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] X'^{(j)} = 0. \quad (3.10)$$

Величини $\xi_2'^{(j)}$ і $\xi_3'^{(j)}$ в (3.10) визначаються з виразів (2.30) для матеріалів кожного з даних шарів.

Таким чином, дослідження закономірностей поширення вісесиметричних пружних хвиль в шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями зводиться до побудови розв'язків рівняння (3.7) для стисливих тіл, і рівняння (3.10) для нестисливих тіл при задоволенні умов безперервності типу (2.6) на площинах розділу шарів і умов періодичності, що відповідають теорії Флоке. При задоволенні умов безперервності і умов періодичності необхідно використати вирази (3.5) і (3.6) у випадку стисливих тіл, і вирази (3.8) і (3.9) – у випадку нестисливих тіл.

3.2. Метод дослідження задач, що розглядаються

Розглянемо поширення вісесиметричної хвилі в радіальному напрямі в шаруватих композитних стисливих та нестисливих матеріалах з початковими напруженнями. При цьому розглядатимемо тільки випадок хвилі, що йде "на нескінченність". В цьому випадку для визначення "істинної" фазової швидкості поширення вісесиметричних хвиль в шаруватому композитному матеріалі з початковими напруженнями по аналогії з [78, 80, 81] приймемо

$$\chi'^{(j)}(r', y_3, \tau) = \chi'^{(j)(0)}(y_3) H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad C = \omega k^{-1}; \quad j=1,2. \quad (3.11)$$

У (3.11) k і ω – хвильове число і кругова частота; C – "істинна" фазова швидкість вісесиметричних хвиль; $H_0^{(1)}(x)$ – функція Ханкеля нульового порядку першого роду, що забезпечує поширення вісесиметричних хвиль, що йдуть «на нескінченність»; $\chi'^{(j)(0)}(y_3)$ – амплітудна функція.

Стисливі тіла. Підставляючи (3.11) в (3.5), для визначення переміщень отримуємо наступні вирази:

$$u_{r'}^{(j)} = u_{r'}^{(j)(0)}(y_3) \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad u_3^{(j)} = u_3^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau};$$

$$u_{r'}^{(j)(0)}(y_3) = -\frac{\partial}{\partial y_3} \chi'^{(j)(0)}(y_3); \quad (3.12)$$

$$u_3^{(j)(0)} = \left(\omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right)^{-1} \left(\omega'_{3113} \frac{d^2}{dy_3^2} + \omega^2 \varrho'^{(j)} - k^2 \omega'_{1111} \right) \chi'^{(j)(0)}(y_3).$$

Аналогічним чином, підставляючи (3.11) в (3.6), для визначення складових тензора напруження $Q'^{(j)}$ при $y_3 = \text{const}$ отримуємо

$$Q_{33}^{(j)} = Q_{33}^{(j)(0)}(y_3) H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad Q_{3r'}^{(j)} = Q_{3r'}^{(j)(0)}(y_3) \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau};$$

$$Q_{33}^{(j)(0)}(y_3) = \left(\omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \omega'_{3333} \omega'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} + \omega^2 \omega'_{3333} \varrho'^{(j)} - k^2 \left[\omega'_{1111} + \omega'_{3333} - \omega'_{1133} \left(\omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right) \right] \right\} \frac{\partial}{\partial y_3} \chi'^{(j)(0)}(y_3); \quad (3.13)$$

$$Q_{3r'}^{(j)(0)} = \left(\omega'_{1133} + \omega'_{1313} \right)^{-1} \left(\omega'_{1133} \omega'_{3113} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} + \omega^2 \omega'_{1313} \varrho'^{(j)} - k^2 \omega'_{1111} \omega'_{1313} \right) \chi'^{(j)(0)}(y_3).$$

Підставляючи (3.11) в (3.7), отримуємо рівняння для визначення функцій $\chi'^{(j)(0)}(y_3)$ у наступній формі:

$$\left[\left(\xi_2'^{(j)^2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \left(\xi_3'^{(j)^2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \omega^2 \varrho'^{(j)} \left(\frac{\omega'_{3333} + \omega'_{3113}}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \frac{\omega'_{1111} + \omega'_{1331}}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \right) + \frac{\omega^4 \varrho'^{(j)^2}}{\omega'_{1111} \omega'_{1331}} \right] \chi'^{(j)(0)}(y_3) = 0. \quad (3.14)$$

Нестисливі тіла. Підставляючи (3.11) в (3.8), для визначення переміщень отримуємо наступні вирази:

$$u_{r'}^{(j)} = u_{r'}^{(j)(0)} \frac{d}{dr'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad u_3^{(j)} = u_3^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau};$$

$$u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} = p^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad (3.15)$$

$$u_{r'}^{(j)(0)} = -\frac{d}{dy_3} \chi'^{(j)(0)}(y_3); \quad u_3^{(j)(0)} = -k^2 \chi'^{(j)(0)}(y_3);$$

$$p^{(j)(0)} = \left[-k^2 (\kappa'_{1111} - \kappa'_{1133} - \kappa'_{1313}) + \kappa'_{3113} \frac{d^2}{dy_3^2} + \omega^2 \varrho'^{(j)} \right] \frac{\partial}{\partial y_3} \chi'^{(j)(0)}(y_3).$$

Аналогічним чином, підставляючи (3.11) в (3.9), для визначення складових тензора напруження $Q'^{(j)}$ при $y_3 = \text{const}$ отримуємо

$$Q'_{33}^{(j)} = Q'_{33}^{(j)(0)} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad Q'_{3r'}^{(j)} = Q'_{3r'}^{(j)(0)} \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau};$$

$$Q'_{33}^{(j)(0)} = \left[-k^2 (\kappa'_{1111} + \kappa'_{3333} - 2\kappa'_{1133} - \kappa'_{1313}) + \kappa'_{3113} \frac{d^2}{dy_3^2} + \omega^2 \varrho'^{(j)} \right] \frac{d}{dy_3} \chi'^{(j)(0)}(y_3); \quad (3.16)$$

$$Q'_{3r'}^{(j)(0)} = - \left(k^2 \kappa'_{1313} + \kappa'_{3113} \frac{d^2}{dy_3^2} \right) \chi'^{(j)(0)}(y_3).$$

Підставляючи (3.11) в (3.10), отримуємо рівняння для визначення функцій $\chi'^{(j)(0)}(y_3)$ у наступній формі

$$\left[\left(\xi_2'^{(j)^2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \left(\xi_3'^{(j)^2} \frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) + \frac{\omega^2 \varrho'^{(j)}}{\kappa'_{1331}} \left(\frac{d^2}{dy_3^2} - k^2 \right) \right] \chi'^{(j)(0)}(y_3) = 0. \quad (3.17)$$

Оскільки в (3.13) – (3.17) усі співвідношення представлені через амплітудні величини, то умови безперервності і періодичності також сформулюємо для амплітудних величин. У зв'язку з цим виділимо два сусідні шари (рис. 3.1) і вважатимемо, що шар, величини якого відмічені індексом 1, займає по осі Oy_3 область $0 \leq y_3 \leq h^{(1)}$ і шар, усі величини якого відмічені індексом 2, займає по осі Oy_3 область $-h^{(2)} \leq y_3 \leq 0$. При повному проковзуванні при $y_3 = 0$ повинні виконуватися умови безперервності векторів напруження і переміщень сформульовані для амплітудних величин напруження і переміщень, в наступній формі:

$$u_3'^{(1)(0)}(0) = u_3'^{(2)(0)}(0); \quad Q'_{33}^{(1)(0)}(0) = Q'_{33}^{(2)(0)}(0);$$

$$Q'_{3r'}^{(1)(0)}(0) = 0; \quad Q'_{3r'}^{(2)(0)}(0) = 0. \quad (3.18)$$

Відповідно до теореми Флоке також повинні виконуватися умови періодичності для амплітудних величин в силу періодичності даної структури (рис. 3.1)

$$\begin{aligned} u_3'^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= u_3'^{(2)(0)}(-h^{(2)}); & Q_{33}'^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= Q_{33}'^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \\ Q_{3r'}'^{(1)(0)}(h^{(1)}) &= 0; & Q_{3r'}'^{(2)(0)}(-h^{(2)}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Таким чином, для стисливих тіл необхідно знайти розв'язок звичайних диференціальних рівнянь (3.14), що задовольняє умовам безперервності (3.18) і періодичності (3.19) з урахуванням позначень (3.12) і (3.13); для нестисливих тіл необхідно знайти розв'язок звичайних диференціальних рівнянь (3.17), що задовольняє умовам безперервності (3.18) і періодичності (3.19) з урахуванням позначень (3.15) і (3.16). Величини $\xi_2'^{(j)}$ і $\xi_3'^{(j)}$, які входять в рівняння (3.14) і (3.17), визначаються з виразів (2.22) і (2.30) для стисливих і нестисливих тіл відповідно.

3.3. Хвилі, що поширюються вздовж стисливих шарів. Довгохвильове (низькочастотне) наближення

Розглянемо закономірності поширення вісесиметричних пружних хвиль в радіальному напрямі уздовж шарів (мал. 3.1) в шаруватому композитному стисливому матеріалі з початковими напруження. По аналогії з результатами, викладеними в монографіях [78, 80, 81], розв'язок рівнянь (3.14) представимо в наступній формі:

$$\begin{aligned} X'^{(j)(0)}(y_3) &= A_1^{(j)} e^{ik\alpha_1^{(j)} y_3} + A_2^{(j)} e^{-ik\alpha_1^{(j)} y_3} + A_3^{(j)} e^{ik\alpha_2^{(j)} y_3} + A_4^{(j)} e^{-ik\alpha_2^{(j)} y_3}; \\ A_n^{(j)} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

У (3.20) $\alpha_1^{(j)^2}$ і $\alpha_2^{(j)^2}$ – корені характеристичних рівнянь, які отримуємо з (3.14) і (2.22) після перетворень у вигляді

$$\begin{aligned} & \omega_{3333}^{(j)} \omega_{3113}^{(j)} \alpha^{(j)4} - \alpha^{(j)2} \left[\left(C^2 \varrho'^{(j)} - \omega_{1111}^{(j)} \right) \omega_{3333}^{(j)} + \left(C^2 \varrho'^{(j)} - \omega_{1331}^{(j)} \right) \omega_{3113}^{(j)} + \right. \\ & \left. + \left(\omega_{1133}^{(j)} + \omega_{1313}^{(j)} \right)^2 \right] + \left(\omega_{1111}^{(j)} - C^2 \varrho'^{(j)} \right) \left(\omega_{1331}^{(j)} - C^2 \varrho'^{(j)2} \right) = 0, \quad C = \frac{\omega}{k}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Введемо в представлення розв'язку (3.20) для кожного шару нові сталі і перетворимо його, записавши відносно середини кожного з шарів в наступній формі:

$$\begin{aligned} X^{(1)(0)}(y_3) &= B_1^{(1)} e^{ik\alpha_1^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)} + B_2^{(1)} e^{-ik\alpha_1^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)} + \\ &+ B_3^{(1)} e^{ik\alpha_2^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)} + B_4^{(1)} e^{-ik\alpha_2^{(1)}\left(y_3 - \frac{1}{2}h^{(1)}\right)}; \\ X^{(2)(0)}(y_3) &= B_1^{(2)} e^{ik\alpha_1^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)} + B_2^{(2)} e^{-ik\alpha_1^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)} + \\ &+ B_3^{(2)} e^{ik\alpha_2^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)} + B_4^{(2)} e^{-ik\alpha_2^{(2)}\left(y_3 + \frac{1}{2}h^{(2)}\right)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Підставивши амплітуди переміщень (3.12) та напружень (3.13) в умови контакту (3.18) і періодичності (3.19), отримаємо однорідну систему з вісьми алгебраїчних рівнянь відносно констант $B_m^{(j)}$ ($m = \overline{1,4}; j = 1,2$). Систему не приводимо внаслідок її громіздкості. Прирівнявши нулю детермінант матриці цієї системи, отримаємо дисперсійне рівняння для довільної вісесиметричної хвилі, що поширюється вздовж шарів шаруватого композитного матеріалу при проковзуванні шарів.

У даному випадку для шаруватих композитних стисливих матеріалів з початковими напруженнями задачу про поширення вісесиметричних хвиль вздовж шарів можна розділити на дві незалежні задачі: квазіповздовжня хвиля ($u_{r'}^{(j)}$ симетричні і $u_3^{(j)}$ антисиметричні відносно середини відповідних шарів), що поширюється уздовж осі Or' ; квазіпоперечна хвиля ($u_{r'}^{(j)}$ антисиметричні і $u_3^{(j)}$ симетричні відносно середини відповідних шарів), що поширюється уздовж осі Or' і поляризована в площині $r'Oy_3$. Визначення квазіповздовжніх і квазіпоперечних хвиль дано у монографіях [78, 81]. Надалі розглянемо окремо квазіповздовжні і квазіпоперечні вісесиметричні хвилі.

3.3.1. Квазіповздовжня хвиля

Розглянемо квазіповздовжню хвилю уздовж вісі Or' . Для даного випадку в (3.22) приймемо наступні залежності:

$$B_1^{(j)} = -B_2^{(j)}; \quad B_3^{(j)} = -B_4^{(j)}. \quad (3.23)$$

За умови (3.23) з (3.12) і (3.22) витікає, що $u_r^{(j)}$ будуть симетричними і $u_3^{(j)}$ будуть антисиметричними відносно середини відповідних шарів.

Враховуючи позначення (3.12) і (3.13) і підставляючи (3.22) і (3.23) в умови неперервності (3.18) і умови періодичності (3.19), після ряду перетворень отримуємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь, з умови існування нетривіальних розв'язків якої виходить дисперсійне рівняння у вигляді

$$\det \|\alpha_{rs}\| = 0; \quad r, s = \overline{1, 4}. \quad (3.24)$$

Елементи детермінанта в лівій частині рівняння (3.24) визначаються по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \beta_{11}^{(1)}; \quad \alpha_{12} = \beta_{12}^{(1)}; \quad \alpha_{13} = \beta_{11}^{(2)}; \quad \alpha_{14} = \beta_{12}^{(2)}; \quad \alpha_{21} = \beta_{21}^{(1)}; \quad \alpha_{22} = \beta_{22}^{(1)}; \\ \alpha_{23} &= -\beta_{21}^{(2)}; \quad \alpha_{24} = -\beta_{22}^{(2)}; \quad \alpha_{31} = \beta_{31}^{(1)}; \quad \alpha_{32} = \beta_{32}^{(1)}; \quad \alpha_{33} = \alpha_{34} = 0; \\ \alpha_{41} &= \alpha_{42} = 0; \quad \alpha_{43} = \beta_{41}^{(2)}; \quad \alpha_{44} = \beta_{42}^{(2)}; \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \beta_{1m}^{(j)} &= \omega_0^{(j)-1} \gamma_{1m}^{(j)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_m^{(j)} h'^{(j)}; \quad \beta_{2m}^{(j)} = \alpha_m^{(j)} \gamma_{3m}^{(j)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(j)} h'^{(j)}; \\ \beta_{3m}^{(1)} &= \gamma_{2m}^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_m^{(1)} h'^{(1)}; \quad \beta_{4m}^{(2)} = \gamma_{2m}^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_m^{(2)} h'^{(2)}. \end{aligned}$$

В формулах (3.25) використовуються наступні позначення

$$\begin{aligned} \gamma_{1m}^{(j)} &= C^2 \varrho'^{(j)} - \omega_{1111}'^{(j)} - \alpha_m^{(j)2} \omega_{3113}'^{(j)}; \quad \gamma_{2m}^{(j)} = \left(C^2 \varrho'^{(j)} - \omega_{1111}'^{(j)} \right) \omega_{1313}'^{(j)} - \alpha_m^{(j)2} \omega_{1133}'^{(j)} \omega_{3113}'^{(j)}; \\ \gamma_{3m}^{(j)} &= \gamma_{1m}^{(j)} \omega_{3333}'^{(j)} \omega_0^{(j)-1} + \omega_{1133}'^{(j)}; \quad \gamma_2^{(j)} = \left(\alpha_1^{(j)2} - \alpha_2^{(j)2} \right) \omega_{3333}'^{(j)} \omega_{3113}'^{(j)}; \\ \gamma_1^{(j)} &= \omega_0^{(j)-1} \left(\alpha_1^{(j)2} - \alpha_2^{(j)2} \right) \omega_{3113}'^{(j)} \left(\omega_{1313}'^{(j)} - \omega_{1133}'^{(j)} \right) \left(C^2 \varrho'^{(j)} - \omega_{1111}'^{(j)} \right); \quad \omega_0^{(j)} = \omega_{1133}'^{(j)} + \omega_{1313}'^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

В виразах (3.26) C – «істинна» фазова швидкість квазіповздовжньої хвилі у напрямі вісі Or' .

Використовуючи позначення (3.26), дисперсійне рівняння (3.24) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & \gamma_1^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h'^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h'^{(2)} \left(\alpha_1^{(1)} \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{22}^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h'^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h'^{(1)} - \right. \\ & \quad \left. - \alpha_2^{(1)} \gamma_{32}^{(1)} \gamma_{21}^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h'^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h'^{(1)} \right) + \\ & + \gamma_1^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h'^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h'^{(1)} \left(\alpha_1^{(2)} \gamma_{31}^{(2)} \gamma_{22}^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h'^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h'^{(2)} - \right. \\ & \quad \left. - \alpha_2^{(2)} \gamma_{21}^{(2)} \gamma_{32}^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h'^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h'^{(2)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Зауважимо, що при умові (3.23) умови неперервності (3.18) і періодичності (3.19) незалежно приводять до одного і того ж дисперсійного рівняння (3.27) при позначеннях (3.26), тобто при умові (3.23) відносно розв'язку (3.22) маємо однакові умови неперервності та періодичності.

Для довгохвильового (низькочастотного) наближення приймаємо умову

$$\frac{h'^{(1)} + h'^{(2)}}{\Lambda} \ll 1, \quad (3.28)$$

де $\Lambda = \frac{2\pi}{k}$ - довжина хвилі.

При умові (3.28) дисперсійне рівняння (3.27) приймає вигляд

$$\begin{aligned} & h'^{(2)} \left(\omega'_{1133} - \omega'_{1313} \right) \left(C^2 \varrho'^{(2)} - \omega'_{1111} \right) \left[\omega'_{3333} \left(\omega'_{1133} - \omega'_{1313} \right) \left(C^2 \varrho'^{(1)} - \omega'_{1111} \right) + \omega'_{1133} \omega_0'^{(1)} \right] + \\ & + h'^{(1)} \left(\omega'_{1133} - \omega'_{1313} \right) \left(C^2 \varrho'^{(1)} - \omega'_{1111} \right) \left[\omega'_{3333} \left(\omega'_{1133} - \omega'_{1313} \right) \left(C^2 \varrho'^{(2)} - \omega'_{1111} \right) + \omega'_{1133} \omega_0'^{(2)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

З виразу (3.29) випливає, що для квазіподовжньої хвилі існують дві швидкості поширення.

При $h'^{(2)} \ll h'^{(1)}$ отримаємо

$$C^2 = \frac{\omega'_{1111}}{\varrho'^{(1)}}; \quad C^2 = \frac{1}{\varrho'^{(2)}} \left[\omega'_{1111} + \frac{\omega'_{1133} \omega_0'^{(2)}}{\omega'_{3333} \left(\omega'_{1313} - \omega'_{1133} \right)} \right]. \quad (3.30)$$

При $h'^{(2)} \ll h'^{(1)}$ отримаємо

$$C^2 = \frac{\omega_{111}^{(2)}}{\rho^{(2)}}; \quad C^2 = \frac{1}{\rho^{(1)}} \left[\omega_{111}^{(1)} + \frac{\omega_{1133}^{(1)2} \omega_0^{(1)}}{\omega_{3333}^{(1)} (\omega_{1313}^{(1)} - \omega_{1133}^{(1)})} \right]. \quad (3.31)$$

Відзначимо, що перші вирази у формулах (3.30) і (3.31) визначають швидкості поширення повздовжніх хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями відповідно першого і другого шарів.

3.3.2. Квазіпоперечна хвиля

Розглянемо квазіпоперечну (зсувну) хвилю уздовж вісі Or' , поляризовану в площині $r'Oy_3$. Для розглянутого випадку в представленні розв'язку у формі (3.22) для двох сусідніх шарів приймемо наступні залежності

$$B_1^{(j)} = B_2^{(j)}; \quad B_3^{(j)} = B_4^{(j)}. \quad (3.32)$$

За умови (3.32) з (3.12) і (3.22) випливає, що $u_{r'}^{(j)}$ будуть антисиметричними і $u_3^{(j)}$ будуть симетричними відносно середини відповідних шарів.

Провівши ті ж перетворення, що і для квазіповздовжньої хвилі, з урахуванням (3.32), отримаємо дисперсійне рівняння у вигляді (3.24) при наступних позначеннях

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \beta_{11}^{(1)}; \quad \alpha_{12} = \beta_{12}^{(1)}; \quad \alpha_{13} = -\beta_{11}^{(2)}; \quad \alpha_{14} = -\beta_{12}^{(2)}; \quad \alpha_{21} = \beta_{21}^{(1)}; \quad \alpha_{22} = \beta_{22}^{(1)}; \\ \alpha_{23} &= \beta_{21}^{(2)}; \quad \alpha_{24} = \beta_{22}^{(2)}; \quad \alpha_{31} = \beta_{31}^{(1)}; \quad \alpha_{32} = \beta_{32}^{(1)}; \quad \alpha_{33} = \alpha_{34} = 0; \\ \alpha_{41} &= \alpha_{42} = 0; \quad \alpha_{43} = \beta_{41}^{(2)}; \quad \alpha_{44} = \beta_{42}^{(2)}; \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \beta_{1m}^{(j)} &= \omega_0^{(j)-1} \gamma_{1m}^{(j)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_m^{(j)} h'^{(j)}; \quad \beta_{2m}^{(j)} = \alpha_m^{(j)} \gamma_{3m}^{(j)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(j)} h'^{(j)}; \\ \beta_{3m}^{(1)} &= \gamma_{2m}^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_m^{(1)} h'^{(1)}; \quad \beta_{4m}^{(2)} = \gamma_{2m}^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_m^{(2)} h'^{(2)}. \end{aligned}$$

Параметри $\omega_0^{(j)}$, $\gamma_{nm}^{(j)}$ в виразах (3.33) визначаються по формулам (3.26).

Таким же чином, як і для квазіповздовжньої хвилі, для квазіпоперечної хвилі дисперсійне рівняння (3.24) з врахуванням (3.26) можна записати

$$\begin{aligned}
 & \gamma_1^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h'^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h'^{(2)} \left(\alpha_1^{(1)} \gamma_{31}^{(1)} \gamma_{22}^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h'^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h'^{(1)} - \right. \\
 & \quad \left. - \alpha_2^{(1)} \gamma_{32}^{(1)} \gamma_{21}^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h'^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h'^{(1)} \right) - \\
 & - \gamma_1^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h'^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h'^{(1)} \left(\alpha_2^{(2)} \gamma_{32}^{(2)} \gamma_{21}^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h'^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h'^{(2)} - \right. \\
 & \quad \left. - \alpha_1^{(2)} \gamma_{31}^{(2)} \gamma_{22}^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h'^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h'^{(2)} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

У цьому випадку параметр C у формулах (3.26) – «істинна» фазова швидкість квазіпоперечної хвилі у напрямі вісі Or' , поляризованої в площині $r'Oy_3$.

Для довгохвильового (низькочастотного) наближення, обмежуючись одночленною апроксимацією отримаємо

$$\begin{aligned}
 & \left(C^2 \varrho'^{(1)} - \omega_{1111}'^{(1)} \right) \left(C^2 \varrho'^{(2)} - \omega_{1111}'^{(2)} \right) \left\{ - \left(\omega_{1133}'^{(2)} + \omega_{1313}'^{(2)} \right)^{-1} \omega_{3113}'^{(2)} \left(\omega_{1313}'^{(2)} - \omega_{1133}'^{(2)} \right) \times \right. \\
 & \times \left[\left(C^2 \varrho'^{(1)} - \omega_{1331}'^{(1)} \right) \left(\omega_{1133}'^{(1)} - \omega_{1313}'^{(1)} \right) \omega_{3113}'^{(1)} \left(\omega_{1133}'^{(1)} + \omega_{1313}'^{(1)} \right)^{-1} - \omega_{1313}'^{(1)2} \right] h'^{(1)} + \\
 & \quad + \left(\omega_{1133}'^{(1)} + \omega_{1313}'^{(1)} \right)^{-1} \omega_{3113}'^{(1)} \left(\omega_{1313}'^{(1)} - \omega_{1133}'^{(1)} \right) \times \\
 & \times \left[\left(C^2 \varrho'^{(2)} - \omega_{1331}'^{(2)} \right) \left(\omega_{1133}'^{(2)} - \omega_{1313}'^{(2)} \right) \omega_{3113}'^{(2)} \left(\omega_{1133}'^{(2)} + \omega_{1313}'^{(2)} \right)^{-1} - \omega_{1313}'^{(2)2} \right] h'^{(2)} \left. \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

З рівняння (3.35) випливає, що квазіпоперечна хвиля при довгохвильовому (низькочастотному) наближенні має швидкості поширення:

$$\begin{aligned}
 & C^2 = \frac{\omega_{1111}'^{(1)}}{\varrho'^{(1)}}; \quad C^2 = \frac{\omega_{1111}'^{(2)}}{\varrho'^{(2)}}; \\
 & C^2 = \left(\varrho'^{(1)} h'^{(1)} - \varrho'^{(2)} h'^{(2)} \right)^{-1} \left\{ h'^{(1)} \left[\omega_{1331}'^{(1)} - \omega_0'^{(1)} \omega_{1313}'^{(1)2} \omega_{3113}'^{(1)-1} \left(\omega_{1313}'^{(1)} - \omega_{1133}'^{(1)} \right)^{-1} \right] - \right. \\
 & \quad \left. - h'^{(2)} \left[\omega_{1331}'^{(2)} - \omega_0'^{(2)} \omega_{1313}'^{(2)2} \omega_{3113}'^{(2)-1} \left(\omega_{1313}'^{(2)} - \omega_{1133}'^{(2)} \right)^{-1} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

При $h^{(2)} \square h^{(1)}$ отримаємо

$$C^2 = \frac{\omega'_{1111}}{\rho'^{(1)}}; \quad C^2 = \frac{\omega'_{1111}}{\rho'^{(2)}}; \quad C^2 = \rho'^{(1)-1} \left[\omega'_{1331} - \omega'_0 \omega'^{(1)}_{1313} \omega'^{(1)2}_{3113} \left(\omega'_{1313} - \omega'_{1133} \right)^{-1} \right]. \quad (3.37)$$

При $h^{(2)} \square h^{(1)}$ отримаємо

$$C^2 = \frac{\omega'_{1111}}{\rho'^{(1)}}; \quad C^2 = \frac{\omega'_{1111}}{\rho'^{(2)}}; \quad C^2 = \rho'^{(2)-1} \left[\omega'_{1331} - \omega'_0 \omega'^{(2)}_{1313} \omega'^{(2)2}_{3113} \left(\omega'_{1313} - \omega'_{1133} \right)^{-1} \right]. \quad (3.38)$$

Аналіз рівнянь (3.27) і (3.34) свідчить, що при поширенні вісесиметричних хвиль при проковзуванні шарів відбувається взаємодія між шарами композиту.

3.4. Хвилі, що поширюються вздовж нестисливих шарів. Квазіпоперечна хвиля. Довгохвильове (низькочастотне) наближення

Розглянемо закономірності поширення вісесиметричних пружних хвиль в радіальному напрямі уздовж шарів (мал. 3.1) в шаруватому композитному нестисливому матеріалі з початковими напруження. По аналогії з результатами, викладеними в монографіях [78, 80, 81] та параграфі 3.3, розв'язок рівнянь (3.17) представимо в формі (3.20). В цьому випадку для визначення функцій $\alpha_1^{(j)2}$ і $\alpha_2^{(j)2}$ з (3.17) і (2.30) маємо характеристичні рівняння

$$\begin{aligned} & \kappa'_{3113} \alpha^{(j)4} - \alpha^{(j)2} \left[C^2 \rho'^{(j)} - \kappa'_{3333} - \kappa'_{1111} + 2 \left(\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313} \right) \right] - \\ & - \left(C^2 \rho'^{(j)} - \kappa'_{1331} \right) = 0, \quad C = \frac{\omega}{k}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Представлення розв'язку (3.20) запишемо відносно середини кожного з шарів в формі (3.22).

Для нестисливого композитного матеріалу з початковими напруженнями (по аналогії з [78, 80, 81]) будемо розглядати квазіпоперечну (зсувну) хвилю, що поширюється вздовж вісі Or' і поляризовану в площині $r'Oy_3$. Для такої хвилі переміщення $u_{r'}^{(j)}$ будуть антисиметричними і $u_3^{(j)}$ будуть симетричними

відносно середини відповідних шарів. Відповідно до викладеного в представленні розв'язку (3.22) приймемо умову (3.32).

Враховуючи позначення (3.15) і (3.16) і підставивши (3.22) і (3.32) в умови (3.18) і (3.19), після ряду перетворень отримуємо однорідну систему алгебраїчних рівнянь, з умови існування нетривіальних рішень якої слідує дисперсійне рівняння у вигляді (3.24) при наступних позначеннях:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \beta_{11}^{(1)}; \quad \alpha_{12} = \beta_{12}^{(1)}; \quad \alpha_{13} = -\beta_{11}^{(2)}; \quad \alpha_{14} = -\beta_{12}^{(2)}; \quad \alpha_{21} = \beta_{21}^{(1)}; \quad \alpha_{22} = \beta_{22}^{(1)}; \\
 \alpha_{23} &= \beta_{21}^{(2)}; \quad \alpha_{24} = \beta_{22}^{(2)}; \quad \alpha_{31} = \beta_{31}^{(1)}; \quad \alpha_{32} = \beta_{32}^{(1)}; \quad \alpha_{33} = \alpha_{34} = 0; \\
 \alpha_{41} &= \alpha_{42} = 0; \quad \alpha_{43} = \beta_{41}^{(2)}; \quad \alpha_{44} = \beta_{42}^{(2)}; \quad \beta_{1m}^{(j)} = \cos \frac{1}{2} k \alpha_m^{(j)} h'^{(j)}; \\
 \beta_{2m}^{(j)} &= \alpha_m^{(j)} \left(C^2 \varrho^{(j)} - \kappa_{1111}^{(j)} - \kappa_{3333}^{(j)} + 2\kappa_{1133}^{(j)} + \kappa_{1313}^{(j)} - \alpha_m^{(j)2} \kappa_{3113}^{(j)} \right) \sin \frac{1}{2} k \alpha_m^{(j)} h'^{(j)}; \\
 \beta_{3m}^{(1)} &= \left(\kappa_{1313}^{(1)} - \alpha_m^{(1)2} \kappa_{3113}^{(1)} \right) \cos \frac{1}{2} k \alpha_m^{(1)} h'^{(1)}; \quad \beta_{4m}^{(2)} = \left(\kappa_{1313}^{(2)} - \alpha_m^{(2)2} \kappa_{3113}^{(2)} \right) \cos \frac{1}{2} k \alpha_m^{(2)} h'^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

В виразах (3.40) C – «істинна» фазова швидкість квазіпоперечної хвилі у напрямі вісі Or' , поляризованої в площині $r'Oy_3$.

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
 \xi'^{(j)} &= \kappa_{1111}^{(j)} + \kappa_{3333}^{(j)} - 2\kappa_{1133}^{(j)} - \kappa_{1313}^{(j)}; \quad \beta'^{(j)} = \left(\alpha_2^{(j)2} - \alpha_1^{(j)2} \right) \kappa_{3113}^{(j)}; \\
 \theta_m'^{(j)} &= \kappa_{1313}^{(j)} - \alpha_m^{(j)2} \kappa_{3113}^{(j)}; \quad \zeta_m'^{(j)} = C^2 \varrho^{(j)} - \xi'^{(j)} - \alpha_m^{(j)2} \kappa_{3113}^{(j)}.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Використовуючи позначення (3.41), дисперсійне рівняння (3.24) для випадку квазіпоперечної хвилі в нестисливому шаруватому композитному матеріалі можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
 &\beta'^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h'^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h'^{(2)} \left(\alpha_1^{(1)} \zeta_1'^{(1)} \theta_2'^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h'^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h'^{(1)} - \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_2^{(1)} \zeta_2'^{(1)} \theta_1'^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h'^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h'^{(1)} \right) - \\
 &- \beta'^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(1)} h'^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(1)} h'^{(1)} \left(\alpha_2^{(2)} \zeta_2'^{(2)} \theta_1'^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h'^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h'^{(2)} - \right.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$-\alpha_1^{(2)} \zeta_1'^{(2)} \theta_2'^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_1^{(2)} h'^{(2)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_2^{(2)} h'^{(2)} \Big) = 0.$$

Для довгохвильового (низькочастотного) наближення при умові (3.28), обмежуючись одночленною апроксимацією отримаємо граничну оцінку для фазової швидкості квазіпоперечної хвилі:

$$C^2 = \frac{\left(\kappa_{1331}'^{(1)} - \kappa_{1313}'^{(1)2} \kappa_{3113}'^{(1)-1} \right) h'^{(1)} + \left(\kappa_{1331}'^{(2)} - \kappa_{1313}'^{(2)2} \kappa_{3113}'^{(2)-1} \right) h'^{(2)}}{\varrho^{(1)} h'^{(1)} + \varrho^{(2)} h'^{(2)}}. \quad (3.43)$$

При $h'^{(2)} \ll h'^{(1)}$ отримаємо

$$C^2 = \varrho^{(1)-1} \left(\kappa_{1331}'^{(1)} - \kappa_{1313}'^{(1)2} \kappa_{3113}'^{(1)-1} \right). \quad (3.44)$$

При $h'^{(2)} \gg h'^{(1)}$ маємо

$$C^2 = \varrho^{(2)-1} \left(\kappa_{1331}'^{(2)} - \kappa_{1313}'^{(2)2} \kappa_{3113}'^{(2)-1} \right). \quad (3.45)$$

Аналіз формул (3.42) і (3.43) свідчить, що при поширенні хвиль відбувається взаємодія між шарами композиту.